Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et app^{ns}.

Gozet - Kuntzmann
Gourdon
Briane - Pagès
Isenmann (dev)

On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, (T, d) un espace métrique et une application $f : X \times T \longrightarrow \mathbb{R}$.

I. Régularité sous le signe intégrale

Théorème 1.1 (convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ convergeant presque partout vers f et telle que pour tout n, $|f_n| \leq g$ μ-pp avec $g \in L^1(\mu)$. Alors $f \in L^1(\mu)$ et $\lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0$.

1. Continuité sous le signe intégrale

Théorème 1.2 Supposons que f satisfasse les conditions suivantes :

- $\forall t \in T$, $f(\cdot, t)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{A}$
- $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall t \in T$, $|f(\cdot, t)| \leq g$ μ-p.p.
- pour μ presque tout x, $f(x, \cdot)$ est continue sur T

Alors, $F : t \in T \longmapsto \int_X f(x,t) \, d\mu(x)$ définit une fonction continue.

Remarque 1.3 La dernière condition est appelée hypothèse de domination.

Application 1.4 Soient $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Alors $F : u \longmapsto \int_a^u f(x) \, dx$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Dérivation sous le signe intégrale

Théorème 1.5 On suppose ici que T est un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que f vérifie les conditions suivantes :

- $\forall t \in T$, $f(\cdot, t)$ est mesurable et intégrable
- pour presque tout x, $f(x, \cdot)$ est dérivable partout
- $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall t \in T$, $|\partial_t f(\cdot, t)| \leq g$ μ-p.p.

Alors $F : t \in T \longmapsto \int_X f(x,t) \, d\mu(x)$ définit une fonction dérivable sur T et vérifie pour tout t, $F'(t) = \int_X \partial_t f(x,t) \, d\mu(x)$.

Remarque 1.6 Lorsqu'on veut montrer la dérivabilité ou de la continuité de F, il est rare qu'on trouve une fonction majorante valable sur tout T. Cependant, comme la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales, il suffit de trouver une fonction majorante sur un voisinage de chaque t, ou encore sur tout compact de T.

Contre-exemple 1.7

Soient $g \in C^0([a,b])$ et $f : (x,t) \longmapsto f(x) \mathbb{1}_{]a,t[}(x)$

On a alors :

- $f(x, \cdot)$ dérivable pp
- $\forall x$, $\partial_t f(x, \cdot) = 0$ p.p.
- $F'(t) = g(t) \neq 0$

Donc l'hypothèse de dérivabilité partout est nécessaire.

Remarque 1.8 En remplaçant " dérivable " par " de classe C^1 " dans le théorème, il reste vrai.

Remarque 1.9 On peut itérer ce théorème pour obtenir la régularité à des ordres supérieurs.

Exemple 1.10

$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est de classe C^∞

Application 1.11 On a, pour $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi_X : t \longmapsto e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2/2}$.

Application 1.12 Soit $u_0 \in L^2([0,2\pi])$ de coefficients de Fourier $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Il existe alors une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ 2π-périodique
- $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ bien définies et coïncidant sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
- $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{L^2} u_0$

On obtient de plus $u \in C^\infty$.

développement 1

3. Holomorphie sous le signe intégrale

Théorème 1.13 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : X \times \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall z \in \Omega$, $f(\cdot, z)$ est mesurable
- $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists g_K \in L^1(\mu)$, $\forall z \in K$, $|f(\cdot,z)| \leqslant g_K$ μ-p.p.
- pour presque tout x, $f(x,\cdot)$ est holomorphe sur Ω

Alors $F : z \in \Omega \longmapsto \int_X f(x,z)\,d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω et pour tout n,
$F^{(n)} : z \longmapsto \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\,d\mu(x)$.

Application 1.14 La fonction $\Gamma : z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ et ses dérivées sont données par : $\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n t^{z-1} e^{-t}\,dt$.
Elle vérifie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et s'étend ainsi en fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exemple 1.15
$\phi : z \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{x-z}\,dx$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$

Application 1.16 On a, pour $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\varphi_X : t \longmapsto e^{imt}e^{-\sigma^2 t^2/2}$.

développement 2 partie 1

Remarque 1.17 En prenant μ la mesure de comptage, on a les résultats de régularité pour des séries de fonctions.

II - Comportement asymptotique

Théorème 2.1 Soient $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, E un $\mathbb{R}$-espace de Banach, $f : [a,b[\longrightarrow E$ et $g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues par morceaux. On a alors :

(i) si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge alors lorsque $x \longrightarrow b^-$:

- $f = O(g) \Longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt = O\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$
- idem avec o et $\sim$

(ii) si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors lorsque $x \longrightarrow b^-$:

- $f = O(g) \Longrightarrow \int_x^b f(t)\,dt = O\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$
- idem avec o et $\sim$

Lemme 2.2 Soient $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$ et $0 < b \leqslant +\infty$ alors lorsque $t \longrightarrow +\infty$, on a : $J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-tcx^\beta}\,dx \sim \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}$.

Théorème 2.3 (méthode de Laplace) Soient $g, h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux, vérifiant :

- $x \longmapsto g(x)e^{h(x)} \in L^1$
- $\exists \delta_0 > 0$, $\forall \delta \in]0,\delta_0[$, $\forall x \geqslant \delta$, $h(x) \leqslant h(\delta)$
- $g(x) \underset{0^+}{\sim} Ax^\alpha$ $(\alpha > -1)$, $h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$ $(c > 0, \beta > 0)$

Alors : $I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\,dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}$

Exemples 2.4

$$\int_0^{+\infty} x^{-\alpha x} t^x\,dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}\, t^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{e}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x).x^t\,dx \underset{+\infty}{\sim} \Gamma(2)\pi^{-t}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{-2} = \frac{\pi^{t+2}}{t^2}$$

III - Transformée de Fourier ; exemple fondamental

Définition 3.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier la fonction $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$.

Proposition 3.2 L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0^0$, $f \longmapsto \hat{f}$ est linéaire continue et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$.

Proposition 3.3 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors :

- $\widehat{f * g} = \hat{f} . \hat{g}$
- $\widehat{\tau_x f}(t) = e^{ixt} \hat{f}(t)$
- $\widehat{f\left(\frac{\cdot}{\alpha}\right)} = \alpha \hat{f}(\alpha \cdot)$
- $\hat{f}(0) = \int f(x) dx$

Théorème 3.4 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \hat{f}(x) dx$ p.p.

Corollaire 3.5 La transformation de Fourier est injective. ~~sur $I = \{f \in L^1(\mathbb{R}) ; \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$~~.

Application 3.6 Polynômes orthogonaux formant une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Exemple 3.7

$f : x \longmapsto \frac{b}{\pi} \times \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$ alors $\hat{f}(\xi) = e^{iat} e^{-b|t|}$, $b > 0$

développement 2 partie 2

Proposition 3.8 Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors : $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (-i\xi)^n \hat{f}(\xi)$. En particulier, $\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right)$.

Proposition 3.9 Soit f tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x \longmapsto x^i f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}$ est de classe C^n et $\hat{f}^{(n)}(\xi) = i^n \widehat{(x \longmapsto x^n f(x))}(\xi)$